

Exercice 01 – Dépolluer une eau avec des carapaces de crevettes (09 points)

1.

1.1.

« La chitine, polymère extrait des carapaces des crustacés et animaux à coquilles, a été découverte en 1811 » : la chitine est un polymère naturel.

« après divers traitements, notamment avec de la soude, elle est transformée en chitosane » : le chitosane est un polymère artificiel.

1.2.

Annexe de la question 1.2 :

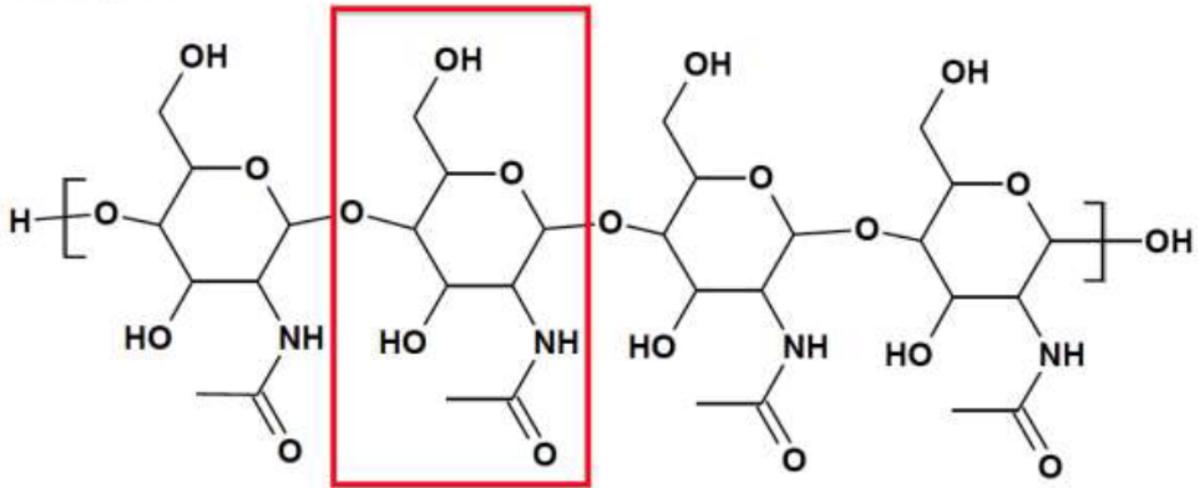
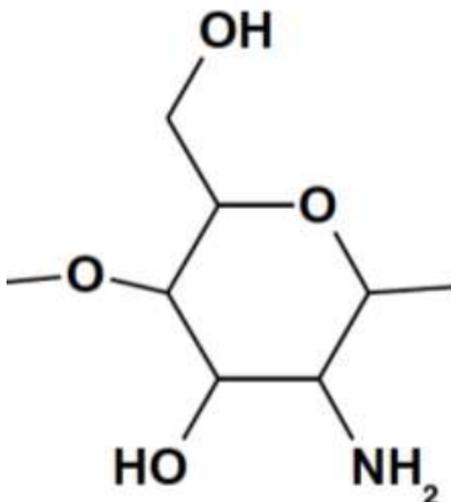


Figure 1. Formule topologique de la chitine à quatre motifs.

2.

2.1.



2.2.

La famille fonctionnelle correspondant au groupe caractéristique formé dans le chitosane lors de la transformation de la chitine en chitosane est la famille amine.

2.3.

Un montage à reflux permet d'accélérer la réaction sans perte de matière.

1 : sortie d'eau

2 : réfrigérant

3 : entrée d'eau

4 : ballon

5 : chauffe ballon

6 : support élévateur

2.4.

$$n_{\text{chitine}}^i = \frac{m_{\text{chitine}}}{M_{\text{chitine}}}$$

$$n_{\text{chitine}}^i = \frac{8,0}{203}$$

$$n_{\text{chitine}}^i = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

Equation					
Etat initial	x=0mol	$3,9 \cdot 10^{-2}$	Excès	0	0
Etat intermédiaire	x	$3,9 \cdot 10^{-2} - x$	Excès	x	4x
Etat final	x=x _f	$3,9 \cdot 10^{-2} - x_f$	Excès	x _f	4x _f

Calculons x_{max} :

$$3,9 \cdot 10^{-2} - x_{\text{max}} = 0$$

$$x_{\text{max}} = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

$$\eta = \frac{m_{\text{exp}}}{m_{\text{Th}}}$$

$$\text{Or } m_{\text{Th}} = n_{\text{Th}} \times M = x_{\text{max}} \times M = 3,9 \cdot 10^{-2} \times 159 = 6,2 \text{ g}$$

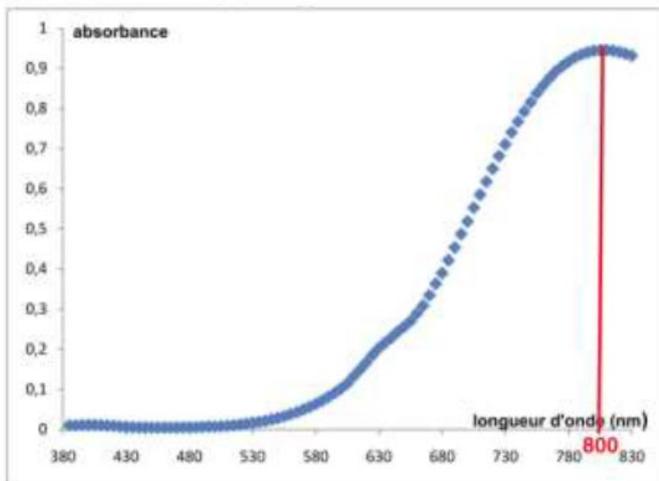
$$\eta = \frac{4,0}{6,2} = 0,65 = 65\%$$

3.

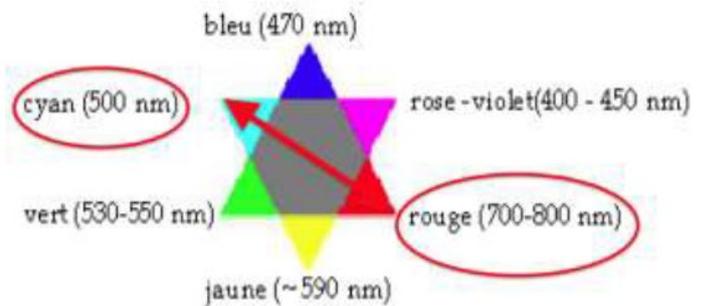
3.1.

La couleur absorbée correspond à $\lambda_{\max} = 800 \text{ nm}$ couleur rouge.

➤ Spectre d'absorption d'une solution aqueuse de sulfate de cuivre(II)



➤ Cercle chromatique



La couleur est la couleur complémentaire du jaune-orange (couleur opposée sur la cercle chromatique) : le cyan.

La solution est donc de couleur cyan.

3.2.

La solution F_1 est obtenue par dilution la solution S.

Lors d'une dilution, la quantité de matière se conserve :

$$n_S = n_1$$

$$C_S V_S = C_1 V_1$$

$$V_S = \frac{C_1 V_1}{C_S}$$

$$V_S = \frac{0,10 \times 10,0}{0,50}$$

$$V_S = 2,0 \text{ mL}$$

Or on désire $V_1=10,0\text{mL}$, on doit donc prendre $V_S=2,0 \text{ mL}$

Protocole :

- Verser la solution mère dans un bécher
- Prélever à l'aide d'une pipette jaugée $V_S=2,0 \text{ mL}$ de la solution mère
- Introduire V_S dans une fiole jaugée $V_1=10,0\text{mL}$
- Ajouter de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge
- Homogénéiser la solution

3.3.

$$n_{\text{Cu}^{2+}}^i = C_0 V_0$$

$$n_{\text{Cu}^{2+}}^i = 0,10 \times 40. 10^{-3}$$

$$n_{\text{Cu}^{2+}}^i = 4,0. 10^{-3} \text{ mol}$$

Equation		$\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$	+	chitosane	→	$[\text{Cu}(\text{chitosane})]^{2+}$
Etat initial	$x=0\text{mol}$	$4,0. 10^{-3}$		Excès		0
Etat intermédiaire	x	$4,0. 10^{-3} - x$		Excès		x
Etat final	$x=x_f$	$4,0. 10^{-3} - x_f$ $= n_{\text{Cu}^{2+}}^f$		Excès		x_f

Calculons x_{max} :

$$4,0. 10^{-3} - x_{\text{max}} = 0$$

$$x_{\text{max}} = 4,0. 10^{-3} \text{ mol}$$

Pour trouver x_f , il nous faut la concentration finale en ion Cu^{2+} .

1^{ère} méthode :

Calculons K avec la relation de Beer Lambert :

$$A = KC$$

$$K = \frac{A}{C}$$

Solution	F1	F2	F3	F4	F5	F6	Filtrat
Concentration en Cu^{2+} en mol.L^{-1}	0,10	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	C_f
A	1,13	0,58	0,44	0,34	0,23	0,11	0,30
$K = \frac{A}{C}$	11,3	11,6	11,0	11,3	11,5	11,0	

Faisons la moyenne :

$$K_{\text{moyen}} = \frac{11,3 + 11,6 + 11,0 + 11,3 + 11,5 + 11,0}{6}$$

$$K_{\text{moyen}} = 11,3 \text{ L. mol}^{-1}$$

D'ou

$$A = 11,3 C$$

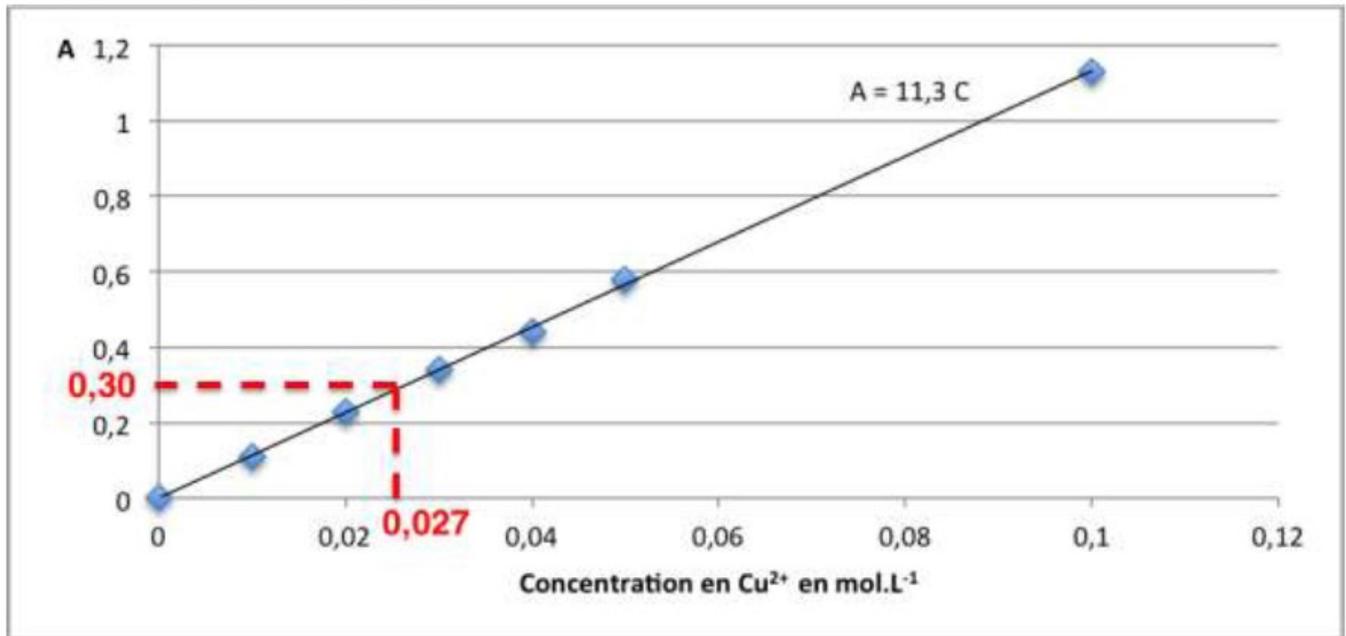
$$C = \frac{A}{11,3}$$

$$C_f = \frac{A_f}{11,3}$$

$$C_f = \frac{0,30}{11,3}$$

$$C_f = 2,7. 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

2nd méthode : on trace A=f(C)



$$n_{\text{Cu}^{2+}}^f = C_f V_0$$

$$n_{\text{Cu}^{2+}}^f = 2,7 \cdot 10^{-2} \times 40 \cdot 10^{-3}$$

$$n_{\text{Cu}^{2+}}^f = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

Calculons x_f :

$$4,0 \cdot 10^{-3} - x_f = n_{\text{Cu}^{2+}}^f$$

$$4,0 \cdot 10^{-3} - x_f = 1,1 \cdot 10^{-3}$$

$$x_f = 4,0 \cdot 10^{-3} - 1,1 \cdot 10^{-3}$$

$$x_f = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

Calculons τ :

$$\tau = \frac{x_f}{x_{\text{max}}}$$

$$\tau = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{4,0 \cdot 10^{-3}}$$

$$\tau = 0,73$$

L'efficacité de ce protocole de dépollution par le chitosane est bonne car 73% des ions cuivre sont éliminés mais il ne dépollue pas totalement.

On pourrait améliorer l'efficacité en supprimant au fur et à mesure les ions $[\text{Cu}(\text{chitosane})]^{2+}$ formés afin de déplacer l'équilibre chimique.

4.

4.1.

$$v_d = - \frac{d[\text{Cu}^{2+}]_{(t)}}{dt}$$

4.2.

La dérivée se calcul en trouvant le coefficient directeur de la tangente en un point de la courbe.

Annexe de la question 4.2. :

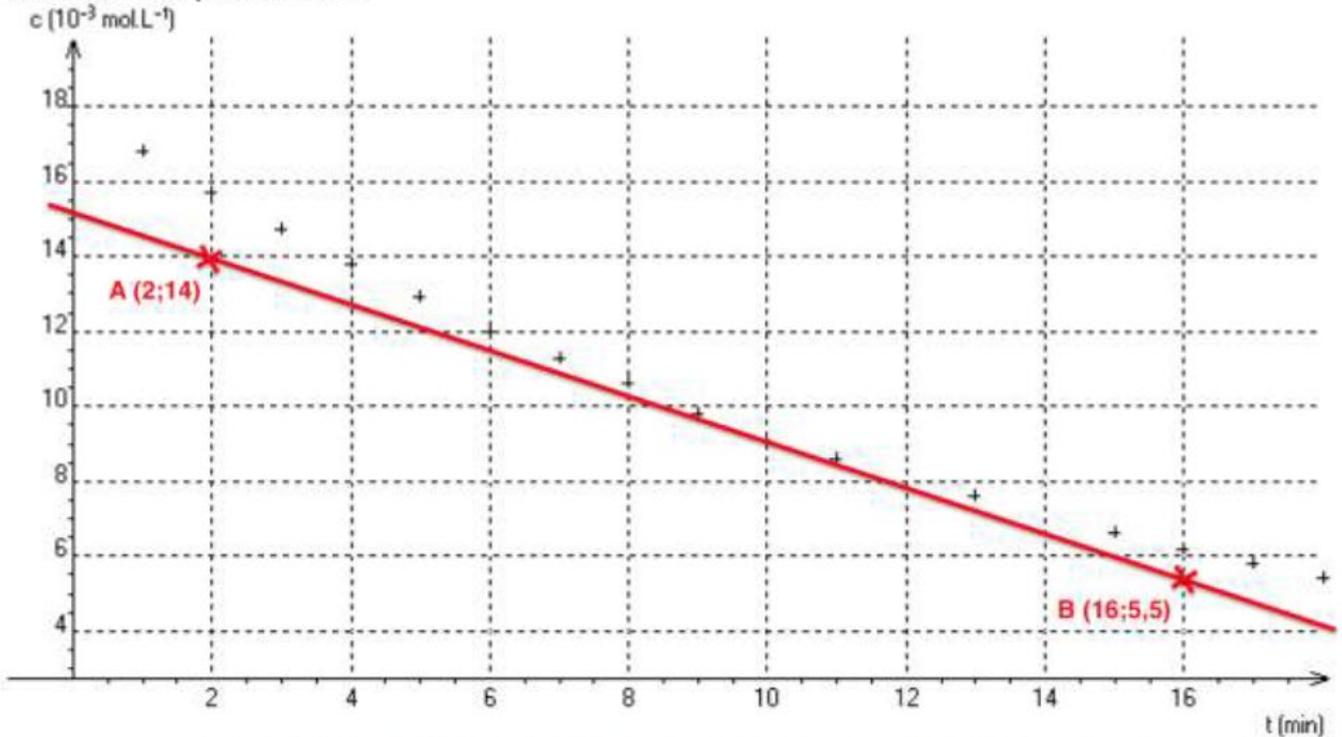


Figure 2. Évolution de la concentration C en ions $\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$ au cours du temps.

Par exemple $t=10 \text{ min}$:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$k = \frac{5,5 \cdot 10^{-3} - 14 \cdot 10^{-3}}{16 - 2} = -6,1 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$v_{t=10 \text{ min}} = -\frac{d[S](t)}{dt} = -k$$

$$v_{t=600\text{h}} = 6,1 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

4.3.

Le coefficient directeur de la tangente en un point de la courbe décroît au cours du temps ainsi la vitesse diminue au cours du temps.

Le facteur cinétique à l'origine de cette évolution est la concentration des réactifs qui diminue.

Annexe de la question 4.2. :

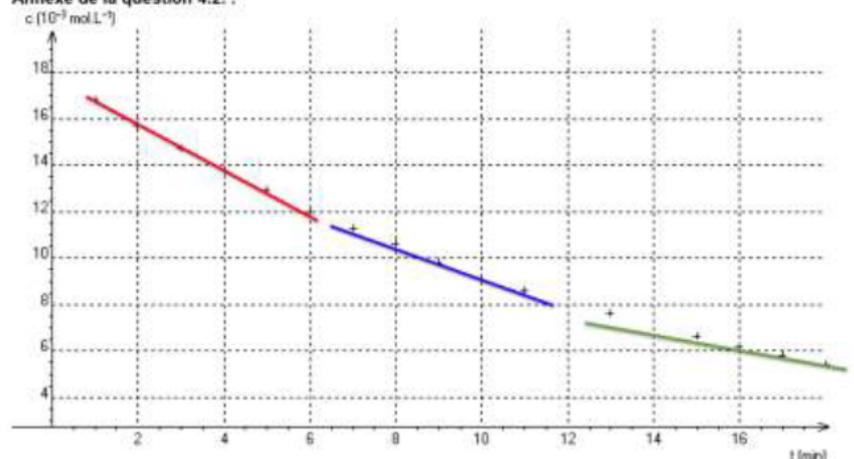


Figure 2. Évolution de la concentration C en ions $\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$ au cours du temps.

4.4.

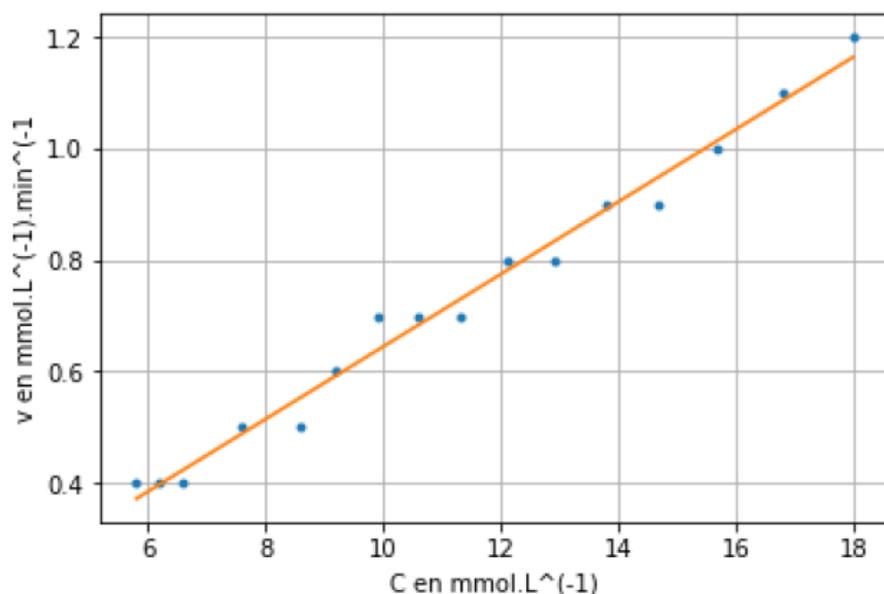
```
10 # Listes des valeurs expérimentales temps en min et concentration C en ions Cu2+(aq) en mmolL-1
11 t=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,15,16,17,18]
12 C=[18.0,16.8,15.7,14.7,13.8,12.9,12.1,11.3,10.6,9.9,9.2,8.6,7.6,6.6,6.2,5.8,5.4]
13
14 v=[]
15 t2=[]
16 i=0
17 while i<len(t)-1 :
18     t2.append(t[i])
19     v.append(-(C[i+1]-C[i])/(t[i+1]-t[i]))
20     i=i+1
```

Ligne 19 :

$$v = -\frac{C_{i+1} - C_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Le calcul de la vitesse se fait en prenant le coefficient directeur entre deux points de la courbe et non de la tangente à la courbe : il s'agit donc d'une valeur approchée.

4.5.



l'équation de la droite affine modélisant le nuage de points est :
 $v = 0.065 C - 0.005$

Une vitesse d'ordre 1 est définie par $v = K \times C$

Ici

$$v = 0,065 C - 0,005$$

$v \approx 0,065 C$ en négligeant 0,005 de la modélisation qui est petit.

Ainsi la complexation des ions $\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$ peut être modélisée par une loi d'ordre 1.

EXERCICE 2 - PROTECTION DES CRAPAUDS (5 points)

- Q1.** On cherche à établir l'expression du vecteur accélération du centre de masse du crapaud. Pour cela, on applique la loi de quantité de mouvement au crapaud assimilé à son centre de masse G , de masse m constante, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements étant négligés, la seule force s'appliquant sur le crapaud est son poids. Il vient alors :

$$m\vec{g} = m\vec{a}_G \implies \vec{a}_G = -g\vec{u}_z$$

On projette alors sur les axes du repère, et il vient finalement :

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases} \quad (1)$$

- Q2.** Maintenant l'expression de l'accélération établie, on intègre (1) en temps pour obtenir l'expression de la vitesse :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_z(t) = -gt + v_{0z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (2)$$

- Q3.** La position initiale étant $(0, 0)$, l'intégration temporelle de (2) permet finalement d'obtenir la position :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \end{cases} \quad (3)$$

- Q4.** Le saut du crapaud est considéré terminé lorsque sa hauteur s'annule pour $t > 0$. On résout donc :

$$z(t) = 0 \iff -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t = 0 \iff t \left(-\frac{1}{2}gt + v_0 \sin(\alpha) \right) = 0$$

Or, on sait qu'on travaille à $t > 0$. D'où :

$$\begin{aligned} z(t) = 0 &\iff -\frac{1}{2}gt + v_0 \sin(\alpha) = 0 \\ &\iff \boxed{t = t_{\text{saut}} = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}} \end{aligned} \quad (4)$$

- Q5.** On cherche à exprimer la vitesse initiale nécessaire en fonction de la longueur souhaitée pour le saut.

Si le saut fait la longueur d , alors

$$x(t_{\text{saut}}) = v_0 \cos(\alpha)t_{\text{saut}} = d \implies t_{\text{saut}} = \frac{d}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Et en injectant dans (4) :

$$t_{\text{saut}} = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{d}{v_0 \cos(\alpha)} \implies \frac{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{gd} = \frac{1}{v_0^2}$$

Et finalement :

$$v_0^2 = \frac{gd}{2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)} \implies \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{gd}{2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}}}$$

Q6. Pour un crapaud faisant partie des plus puissants, on a :

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,81 \times 20 \times 10 \times 10^{-2}}{2 \times \sin(45) \cos(45)}} = \underline{4,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Q7. Pour $\alpha = 90^\circ$, on a $\sin(\alpha) = 1$ et $\cos(\alpha) = 0$. On a donc :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

Fonction de degré 2 admettant un maximum¹ en $t_M = \frac{v_0}{g}$. Et ce maximum vaut :

$$\begin{aligned} z_{\max} = z(t = t_M) &= -\frac{1}{2}g \times \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \times \frac{v_0}{g} \\ &= -\frac{1}{2}g \times \frac{v_0^2}{g^2} + \frac{v_0^2}{g} \\ &= -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} \end{aligned}$$

D'où, on a bien :

$$\boxed{z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

Q8. Et à une vitesse initiale calculée précédemment pour un crapaud parmi les plus puissants, on calcule :

$$H_{\text{champion}} = \frac{4,4^2}{2 \times 9,81} = \underline{0,99 \text{ m} = 99 \text{ cm}}$$

Q9. La barrière est en réalité de hauteur inférieure à cette valeur, pour deux raisons principales : premièrement, l'étude menée néglige les frottements de l'air, qui, pour la géométrie d'un crapaud, et les vitesses considérées, auront une légère influence ; et la seconde est que le crapaud le plus puissant, pour atteindre une telle hauteur, réalise un saut vertical, donc ne parcourt aucune distance. Il lui sera donc impossible de franchir la barrière en sautant sur place !

Exercice 3 — Modélisation d'un détecteur capacitif d'humidité

1. Modélisation de la charge du condensateur

Q1. La capacité est proportionnelle à la permittivité ε . Ainsi, lorsque l'humidité augmente, ε augmente donc C également.

Q2. On souhaite établir l'équation différentielle décrivant la charge du condensateur. Pour cela, on écrit préalablement :

— La loi d'Ohm aux bornes de la résistance :

$$u_R = Ri \implies i = \frac{u_R}{R} \quad (5)$$

— La loi des mailles dans le circuit en série :

$$E - u_C - u_R = 0 \implies u_R = E - u_C \quad (6)$$

— La relation aux bornes du condensateur :

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad (7)$$

On injecte alors (6) et (7) dans (5) :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E - u_C}{R} \implies RC \frac{du_C}{dt} = E - u_C \implies RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

Et finalement, en posant $\tau = RC$, il vient l'équation différentielle du premier ordre en tension :

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad (\mathcal{E})$$

Q3. On considère la fonction $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$. On la dérive en temps :

$$\frac{du_C}{dt}(t) = \frac{E}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Alors :

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E e^{-t/\tau} + E - E e^{-t/\tau} = E$$

La fonction proposée est donc bien solution de l'équation différentielle (\mathcal{E}).

De plus, à $t = 0$, $u_C(t = 0) = E(1 - e^0) = E(1 - 1) = 0$ V, ce qui est bien la condition initiale.

La fonction proposée est donc bien la solution à (\mathcal{E}) respectant la condition initiale, elle décrit donc bien l'évolution de la tension lors de la charge du condensateur.

Q4. À $t = \tau$, on a :

$$u_C(t = \tau) = E(1 - e^{-\tau/\tau}) = E(1 - e^{-1}) = 0,63E$$

On a donc bien, à l'instant $t = \tau$, $u_C(\tau) = 0,63E$.

2. Modélisation de la mesure de la teneur en eau d'un sol argileux

Q5. L'appareil mesure les tensions à une fréquence $f = 52000$ Hz, et admet donc comme période :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{52000} = 19,2 \mu\text{s}$$

Ainsi, les 10 mesures nécessaires, limitant le temps caractéristique du circuit RC, sont prises en $10T = 192 \mu\text{s}$, ce qui implique bien $\tau_{\min} \sim 200 \mu\text{s}$.

Q6. On cherche la teneur minimale en eau que le dispositif est capable de mesurer. Pour cela, on a la capacité :

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \implies \varepsilon = \frac{Cd}{S}$$

Mais on peut également exprimer la capacité en fonction du temps caractéristique :

$$\tau = RC \implies C = \frac{\tau}{R}$$

Alors finalement :

$$\boxed{\varepsilon_{\min} = \frac{\tau d}{RS}}$$

D'où :

$$\varepsilon_{\min} = \frac{192 \times 10^{-6} \times 1,0 \times 10^{-2}}{2,2 \times 10^5 \times 1,0 \times 10^{-1}} = 8,7 \times 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} = 0,8 \times 10^{-10} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Finalement, à partir de cette valeur minimale, on lit graphiquement :

$$\underline{\%_{\text{H}_2\text{O},\min} = 12 \%}$$

Q7. L'objectif final de cet extrait de programme est la mesure de τ .

Q8. Ainsi, la ligne 5 du programme, étant une condition sur la tension, est la suivante :

while tension < 0.63 * E

Q9. Le microcontrôleur a mesuré $\tau = 0,287$ ms. Or, on a :

$$\varepsilon = \frac{\tau d}{RS}$$

D'où, pour le sol mesuré :

$$\varepsilon = \frac{0,287 \times 10^{-3} \times 1,0 \times 10^{-2}}{2,2 \times 10^5 \times 1,0 \times 10^{-1}} = 1,3 \times 10^{-10} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Graphiquement, on lit donc :

$$\underline{\%_{\text{H}_2\text{O}} = 20 \%}$$

Le sol est donc trop faible en humidité pour pouvoir y faire pousser normalement une plante.